Análisis Funcional – Evaluación 2

1. a) Prueba que el conjunto $P = \{x \in c_0 : |x(n)| < 1\ \forall n \in \mathbb{N}\}$ es abierto en c_0.

   b) ¿Es abierto en ℓ_∞ el conjunto $P = \{x \in \ell_\infty : |x(n)| < 1\ \forall n \in \mathbb{N}\}$?

2. Representaremos por $C^1[a,b]$ el espacio de las funciones reales con primera derivada continua en $[a,b]$.

   a) Prueba que $(C^1[a,b], \|\ \|_\infty)$ no es completo.

   b) Para $f \in C^1[a,b]$ definimos
   $$\|f\|^1 = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$
   Prueba que con dicha norma $C^1[a,b]$ es un espacio de Banach separable.

Sugerencias. Para el ejercicio 1 a) puede ser útil probar que si $x \in c_0$ entonces se verifica que $\|x\|_\infty = \text{máx}\,\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$. En el ejercicio 2 deberás usar el teorema de conservación de la derivabilidad por convergencia uniforme, pero para funciones con primera derivada continua dicho teorema tiene una demostración inmediata. También necesitarás usar un resultado debido a Weierstrass que prueba que toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es límite uniforme en dicho intervalo de una sucesión de funciones polinómicas. Te vendrá bien consultar los teoremas 10.18 y 10.39 de mi libro *Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable*.